Vorkurs 26.2.2024

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

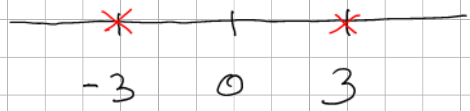
4.1 Quadratische Gleichungen

4.1.1 Arten quadratischer Gleichungen

1) $x^2 = 9$

$x_1 = +3$

$x_2 = -3$



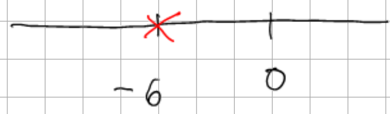
$\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \vee x = 3 \}$

$= \{ -3, 3 \}$

2) $(x+6)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} + 6 = 0$

$x_{1/2} = -6$



3) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x-5)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = 5$

4)

$$x^2 - 49 = 0$$
$$x^2 = 49 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_1 = 7$$
$$x_2 = -7$$

oder

$$x^2 - 49 = 0$$
$$(x+7)(x-7) = 0$$

Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist.

$$x_1 + 7 = 0 \qquad x_2 - 7 = 0$$
$$x_1 = -7 \qquad x_2 = 7$$

$$\left(x + \frac{7}{3012}\right)\left(x - \frac{13^2}{\sqrt{\pi}}\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{7}{3012}$$
$$x_2 = \frac{13^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$(x+3)(x-5) = 0$$
$$x_1 = -3$$
$$x_2 = 5$$

Aber:

$$x^2 - 137x - 591 = 0$$

$$x^2 - \frac{19}{7}x + \frac{91}{1112} = 0$$

Lösen quadratischer Gleichung mittels $\boxed{\text{Quadratischer Ergänzung}}$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{56}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} - \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$$

Quadratische Ergänzung allgemein durchführen, um Formel zu entwickeln

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad | \sqrt{\ }$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Lösungen hängen von p und q ab und somit vom Radikanden, der sog. Diskriminante.

1) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ 2 verschiedene Lösungen 2 Werte x_1, x_2

2) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ 2 gleiche Lösungen 1 Wert x_1, x_2

3) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ keine reelle Lösung

Beispiele:

$$x^2 - 4x + 80 = 0$$

$$p = -4 \qquad q = 80$$

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 80}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - 80}$$

keine reelle Lösung

Spezielle Fälle:

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Substitution: $z := x^2 \Rightarrow z^2 = x^4$

$$\Rightarrow \quad z^2 - z - 6 = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = -2$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2$$

$$3 = x^2$$

$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{3}$$

$$z_2 = x^2$$

$$-2 = x^2$$

keine weiteren reellen Lösungen

$$x^6 - 5x^3 + 6 = 0$$

Substitution: $z := x^3 \Rightarrow z^2 = x^6$

$$\Rightarrow \quad z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$(z-2)(z-3) = 0$$

$z_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}$

$z_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_{4,5,6} = \sqrt[3]{3}$

$$x^{10} + 3x^4 + 8 = 0$$

Nicht mit Substitution lösbar, da $(x^4)^2 = x^8 \neq x^{10}$

allgemeine quadratische Gleichung

$$7x^2 + 19x - 31 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a \qquad \text{mit } a \neq 0$$

$$x^2 + \underbrace{\boxed{\frac{b}{a}}}_{p} x + \underbrace{\boxed{\frac{c}{a}}}_{q} = 0$$

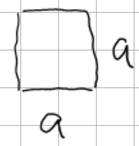
Division durch a ist erlaubt, da für $a = 0$ keine quadratische Gleichung vorliegt

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

Beispiel:

Wird eine Seite eines Quadrates auf ein Drittel ihrer Länge verkürzt und die andere Seite um 8 cm verlängert, so nimmt der Flächeninhalt um 8 cm^2 ab. Wie lang ist die Quadratseite?



$$\frac{1}{3}a\,(a+8) = a^2 - 8$$

$$\frac{1}{3}a^2 + \frac{8}{3}a = a^2 - 8$$

$$-\frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}a + 8 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_1 = 6$$

$a_2 = -2$ nicht sinnvoll, da Längen nicht negativ sind

Probe:

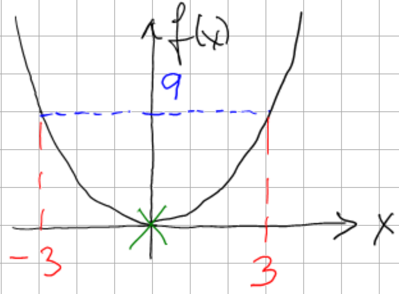
$$2 \cdot 14 = 36 - 8$$

$$28 = 28 \quad \checkmark$$

4.1.3 Grafische Darstellung

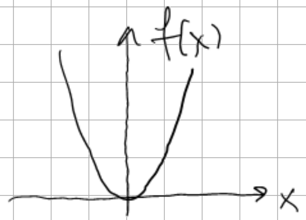
$x^2 = 9$

$f(x) = x^2$

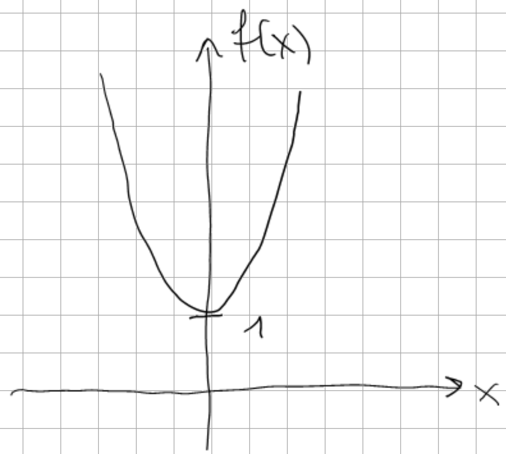


$S(0|0)$

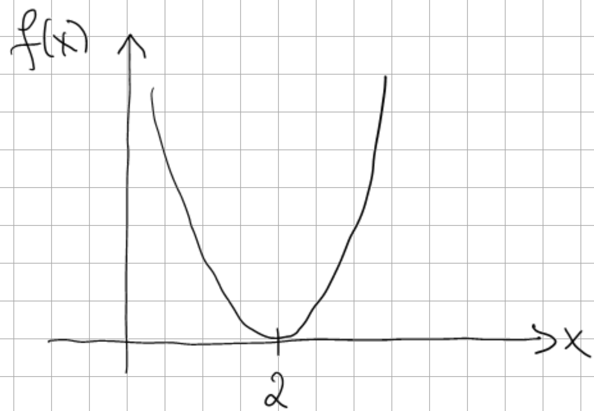
$f(x) = x^2$



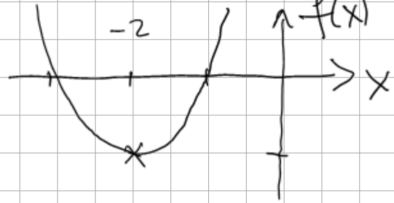
$f(x) = x^2 + 1$



$f(x) = (x-2)^2$



$f(x) = (x+2)^2 - 1$



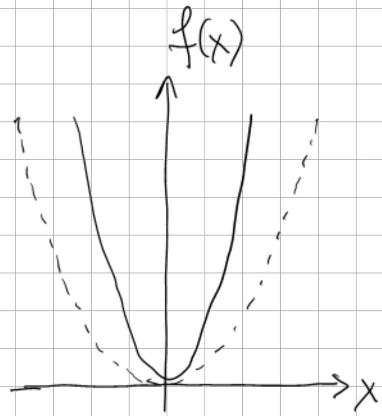
$S(-2 / -1)$

$f(x) = -x^2$

$f(x) = 2x^2$

schmaler

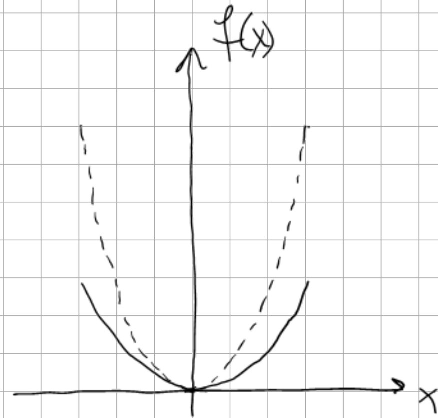
gestreckt



$f(x) = \frac{1}{2}x^2$

breiter

gestaucht



$f(x) = (x+2)^2 - 1$ Scheitelpunktform

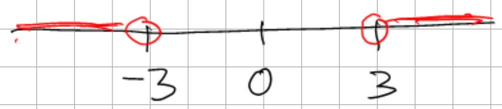
$f(x) = ax^2 + bx + c$ allgemeine Darstellung

ausmultiplizieren

quadratische Ergänzung

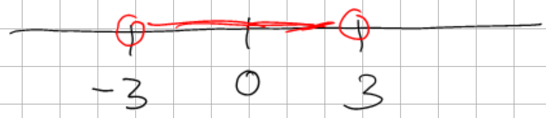
4.2 Quadratische Ungleichungen

$x^2 > 9$



$\Rightarrow \quad x > 3 \underset{\text{oder}}{\vee} x < -3$

$x^2 < 9$



$\Rightarrow \quad x < 3 \underset{\text{und}}{\wedge} x > -3$

$-3 < x < 3$

Zwei Lösungsstrukturen:

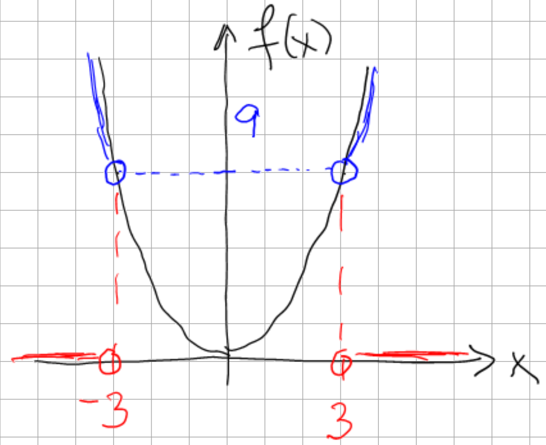
- zwei getrennte Bereiche
- ein zusammenhängender Bereich

Vorsicht beim Quadrieren von Ungleichungen!!

siehe Zusatzdokument

$f(x) = x^2$

$x^2 > 9$



Aufgaben:

Skript Nr. 33 a, d, g p-q-Formel

Nr. 34 d, e, f, l quadratische Ergänzung

Zusatzdokument Kap. 4.1 Nr. 1-8

Kap. 4.2 Teil 1: Nr. 1, 4, 5

Teil 2: Nr. 2, 3