

Vorkurs 28.2.2024

Exponentialfunktion

Exponentielles Wachstum $f(x) = f(0) \cdot q^x$

mit $f(x)$: Größe, deren Veränderung gemessen wird, z.B. Geld, Strahlung

x : in Abhängigkeitszeit von x erfolgt die Zu- und Abnahme, z.B. Zeit, Höhe

$f(0)$: Menge, die am „Anfang“ ($x=0$) vorhanden ist, Startwert

$f(x)$: Menge, die nach „Ablauf“, „Verstreichen“ von x vorhanden ist

q : Faktor, der die Zu- oder Abnahme beschreibt

$$q = 1,05 = 1 + \frac{5}{100} \quad \text{Zunahme um } 5\%$$

$$q = 0,96 = 1 - \frac{4}{100} \quad \text{Abnahme um } 4\%$$

dann kann mit zwei Größen die Funktion definieren: $f(0)$, q

Zwei Wertepaare bekannt, dann 2 Gleichungen aufstellen: $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

Beliebt als Basis: Eulersche Zahl $e \approx 2,718$

$$f(x) = f(0) \cdot e^{\frac{x}{c}} \quad c \text{ ist zu bestimmen}$$

Beispiele

1) Zunahme einer Algenkultur

Nach 4 Tagen: 20 cm^2

Nach 6 Tagen: 40 cm^2

Tägliche Zunahme der Algenfläche in Prozent?

$$f(4d) = 20 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad 20 = f(0) \cdot q^4$$

$$f(6d) = 40 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad 40 = f(0) \cdot q^6$$

$$20 = f(0) \cdot q^4 \quad | : q^4$$

$$f(0) = \frac{20}{q^4}$$

Einsetzen in 2. Gleichung:

$$40 = \frac{20}{q^4} \cdot q^6$$

$$40 = 20 \cdot q^2$$

$$q^2 = 2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$q_1 = \sqrt{2}$$

$$q_2 = -\sqrt{2} \quad \text{nicht sinnvoll, da negativ}$$

$$\text{also } q = \sqrt{2} \approx 1,41$$

Zunahme um 41%

q in Gleichung von $f(0)$ einsetzen

$$f(0) = \frac{20}{\sqrt{2}^4}$$

$$f(0) = \frac{20}{4}$$

$$f(0) = 5$$

$$\text{also } f(x) = 5 \cdot \sqrt{2}^x$$

$$f(x) = 5 \cdot 1,41^x$$

2) Eine schwere Aufgabe kann nur von 3 Studierenden gelöst werden.

Pro Stunde können sie den Lösungsweg einer weiteren Person erklären.

Wieviele Studierende können den Lösungsweg nach 5 Stunden?

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

$$f(5) = 3 \cdot 2^5 = 96$$

3) Kapital 5000 €, Zinssatz von 2% pro Jahr, Zinsen werden mitverzinst

Wieviel Kapital hat man nach 3 Jahren?

$$f(x) = 5000 \cdot 1,02^x$$

$$f(3) = 5000 \cdot 1,02^3$$

$$\approx 5306,04$$

4) Intensität von Licht nimmt beim Durchgang durch eine Glasplatte um 4% ab. Wieviel Licht ist nach 8 Platten noch vorhanden?

$$f(x) = f(0) \cdot 0,96^x$$

$$f(8) = f(0) \cdot 0,96^8$$

$$= f(0) \cdot 0,721$$

Alternative Annätze:

$$- f(0) = 100 \quad \text{Einheit Prozent} \Rightarrow f(8) = 100 \cdot 0,96^8 = 72,1$$

$$- f(0) = 1 = \frac{100}{100} \Rightarrow f(8) = 1 \cdot 0,96^8 = 0,721$$

Problemstellung

radioaktives Jod $T_H \approx 7d$ T_H : Halbwertszeit
zu Beginn: 80g

Wieviel Jod ist nach 14 Tagen noch vorhanden?

Start: $f(0) = 80$

1. Woche: $f(1) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 40$

2. Woche: $f(2) = 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 20$

x: Anzahl verstrichener Halbwertszeiten

Wieviel Jod ist nach 10 Tagen noch vorhanden?

1. Woche: $f(7) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{7}}$ Wert von x

2. Woche: $f(14) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{7}}$ T_H

x: Anzahl verstrichener Tage

also: $f(t) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{7}}$

mit: t : Zeit
 $T_H = 7$: Halbwertszeit

} $\frac{t}{T_H}$ Anzahl verstrichener Halbwertszeiten

Unser Beispiel: $f(10) = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{7}}$
 $\approx 29,72$

allgemein:

$$f(t) = f(0) \cdot q^{\frac{t}{T_0}}$$

mit T_0 : Halbwertszeit, Drittelungszeit, Verdopplungszeit ...

Problem:

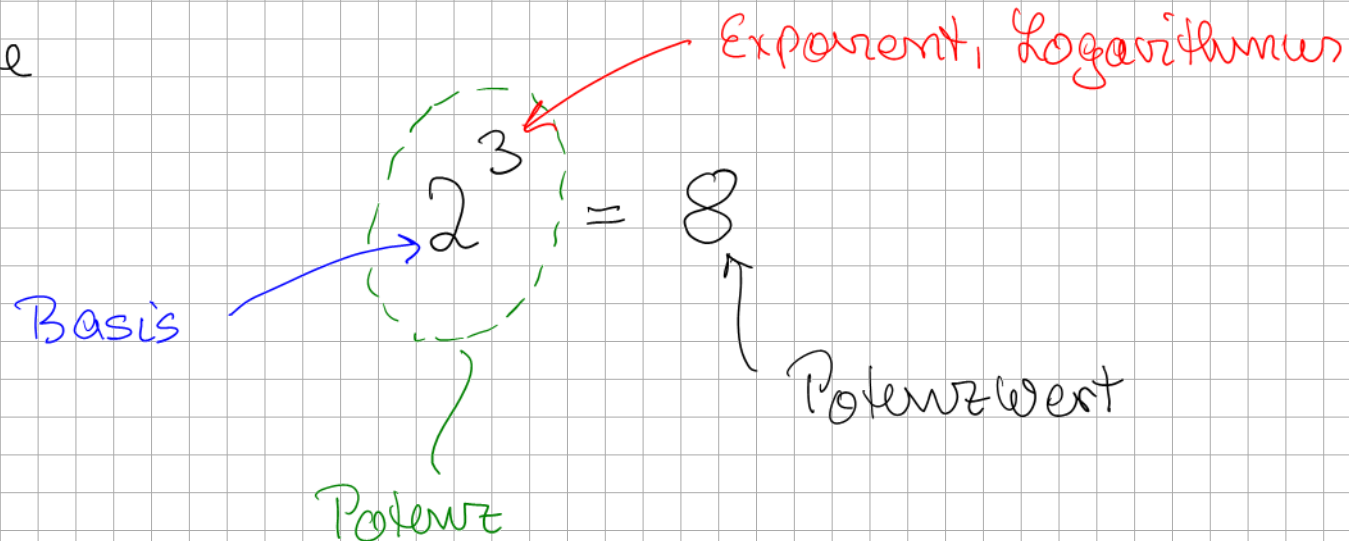
Isotop $T_H \approx 30 \text{ y}$ zu Beginn: $10\,000 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$ (Bq: Anzahl Zerfälle/s)
Wann sind $600 \frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$ erreicht?

$$600 = 10\,000 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

Um nach t aufzulösen, braucht man Logarithmenrechnung.

5.3 Logarithmen

Begriffe



$$2^3 = x$$

Potenzieren

$$x^3 = 8$$

radizieren

$$2^x = 8$$

logarithmieren

Der Exponent, der zur Basis 2 gehört, so daß der Potenzwert 8 ist, ist 3.

Der Exponent zur Basis 2 für den Potenzwert 8 ist 3.

Der Logarithmus zur Basis 2 von 8 ist 3.

$$\log_2(8) = 3$$

$$2^3 = 8$$

Regeln

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3}$$

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3}$$

$$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

$$9^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad \log_9(81) = 2$$

$$\log_5(125) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 125$$

$$\log_3(9) = \log_3(3^2) = 2$$

$$\begin{aligned} \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{64}}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4^3}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2(2^{-2}) = -2 \\ &= \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^{6/3}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = -2 \end{aligned}$$

$$\log_5(1) = 0$$

$$\log_a(1) = 0 \quad \text{Spezialfall: } a = 1 \quad \text{Logarithmus beliebig}$$

oft gebräuchlich: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ dekadischer Logarithmus
 $\log_e(x) = \ln(x)$ natürlicher Logarithmus

Was tun, wenn $\log_2(5)$?

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad b \text{ "beliebige Basis"}$$

also: $\log_2(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} = \frac{\lg(5)}{\lg(2)}$

Bemerkung:

$$f(x) = x^2$$

$$f_{\text{speziell}}(x) = \dots$$

$$\ln(x) = \dots$$

Beispiel

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \left(\sqrt[3]{7^{10}} \right) = \frac{\log_7 \left(7^{\frac{10}{3}} \right)}{\log_7 \left(7^{\frac{1}{5}} \right)} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{50}{3}$$

Aufgaben

Skript Nr. 26-29

Zusatzdokument Kap. 5.2 Nr. 1-4

Skript Nr. 22

Zusatzdokument Kap. 5.3 Nr. 1