Vorkurs 20.2.2025

3. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

3.1 Lineare Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 5x^2 + 2x + \frac{1}{x} = 17 \\ 5x + 2x + \frac{1}{x} = 17 \end{array}\right\} \text{ keine lineare Gleichung}$$

$$5x + 2x + x = 17 \quad \} \text{ lineare Gleichung}$$

Wenn x nur in Potenzen mit Exponent 1 auftritt, liegt eine lineare Gleichung vor.

1. Fall:

$$2x + 5 = 8x + 12 \qquad | -8x - 5$$

$$-6x = 7$$

$$x = -\frac{7}{6}$$

eine Lösung

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{7}{6}\right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = -\frac{7}{6} \right\}$$

$\boxed{\text{Probe machen!}}$

2. Fall:

$$2x + 7 = 2x - 6 \quad | -2x - 7$$

$$0 = -13$$ keine Lösung

$$\mathbb{L} = \{ \ \} = \emptyset$$

3. Fall:

$$2x + 4 = 5x + 3 - 3x + 1$$

$$2x + 4 = 2x + 4$$

$$4 = 4$$ unendlich viele Lösungen

$$0 = 0$$ (für unendlich große Grundmenge von x)

$$\mathbb{L} = \mathbb{R}$$ Gleichung ist allgemeingültig

zu Fall 1: Grundmenge von x: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$x = -\frac{7}{6}$$

$$\mathbb{L} = \{ \ \}$$

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Anwendung: 6 Fl O-Saft und 6 Fl A-Saft 10€
4 Fl O-Saft und 8 Fl A-Saft 12€

x y

$$6x + 6y = 10 \quad | :2$$
$$4x + 8y = 12 \quad | :4$$

$$\text{I} \quad 3x + 3y = 5$$
$$\text{II} \quad x + 2y = 3$$

II nach x auflösen: $x = 3 - 2y$

Term in I einsetzen: $3(3-2y) + 3y = 5$

$$9 - 6y + 3y = 5$$
$$-3y = -4$$
$$y = \frac{4}{3}$$

y in Gleichung für x einsetzen: $x = 3 - 2 \cdot \frac{4}{3}$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) \right\} = \left\{ x, y \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3} \right\}$$

Probe!

Lösungen in beide Ausgangsgleichungen einsetzen

1. Lösungsmethode

$$\text{I} \quad -4x + 6y = -3$$
$$\text{II} \quad x = -2y + 6$$

Lösungsmethode: Den Term für x aus II in I einsetzen

$$\Rightarrow \quad -4(-2y+6) + 6y = -3$$
$$8y - 24 + 6y = -3$$
$$14y = 21$$
$$y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \cdot \frac{3}{2} + 6$$
$$x = 3$$

eine Lösung

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(3, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

Probe:

$$-4 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{3}{2} = -3$$
$$-12 + 9 = -3$$
$$-3 = -3 \checkmark$$

$$3 = -2 \cdot \frac{3}{2} + 6$$
$$3 = -3 + 6$$
$$3 = 3 \checkmark$$

2. Lösungsmethode

$$\text{I} \quad 2y = -4 + 3x$$

$$\text{II} \quad 2y = 2 + 3x$$

Lösungsmethode: rechte Seiten gleichsetzen

$$-4 + 3x = 2 + 3x \quad | -3x$$

$$-4 = 2$$

$$\mathbb{L} = \{ \quad \}$$

keine Lösung

3. Lösungsmethode:

$$\begin{aligned} I \quad & 4x + 2y = 3 \\ II \quad & -28x - 14y = -21 \end{aligned}$$

Lösungsmethode: Geeignet mit Zahlen multiplizieren und dann Gleichungen addieren, um eine Unbekannte zu eliminieren

$$\begin{aligned} I' \quad & 4x + 2y = 3 \\ II' \quad & -4x - 2y = -3 \end{aligned}$$

$$I' + II' \qquad 0 = 0$$

unendlich viele Lösungen für x und y, wobei x und y die Gleichung $4x + 2y = 3$ erfüllen müssen

$$\mathbb{L} = \{ x, y \in \mathbb{R} \mid 4x + 2y = 3 \}$$

$$= \{ x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x + \tfrac{3}{2} \}$$

Beispiele

1) Die Staaten Krisenien und Minussien haben Schulden.
Übernimmt Krisenien von Minussien 5 Milliarden, so hat Krisenien doppelt so viel Schulden wie Minussien.
Gibt Krisenien 3 Milliarden an Minussien ab, so haben beide gleich viele Schulden.
Wieviel Schulden hat jeder der beiden Länder? k, m

$$k+5 = 2(m-5)$$
$$k-3 = m+3$$

$$k+5 = 2m-10$$
$$k-3 = m+3$$

$$\text{I} \quad k-2m = -15$$
$$\text{II} \quad k-m = 6$$

$$\text{I}-\text{II} \quad -m = -21$$
$$\underline{m = 21}$$

$$\Rightarrow \quad k-21 = 6$$
$$\underline{k = 27}$$

2) Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 10.

Vertauscht man die beiden Ziffern, erhält man eine um 54 größere Zahl.

$$\underbrace{x\ y}_{\text{Ziffern}}$$

$$x + y = 10$$

$$10x + y = 10y + x - 54$$

$$\text{I} \qquad x + y = 10$$
$$\text{II} \qquad 9x - 9y = -54 \quad | :9$$

$$\text{I}' \qquad x + y = 10$$
$$\text{II}' \qquad x - y = -6$$

$$\text{I}' + \text{II}' \qquad 2x = 4$$
$$x = 2$$

Einsetzen $\qquad y = 8$

Zahl $\qquad 28$

3.1.3 Grafische Darstellung

i) Eine lineare Gleichung

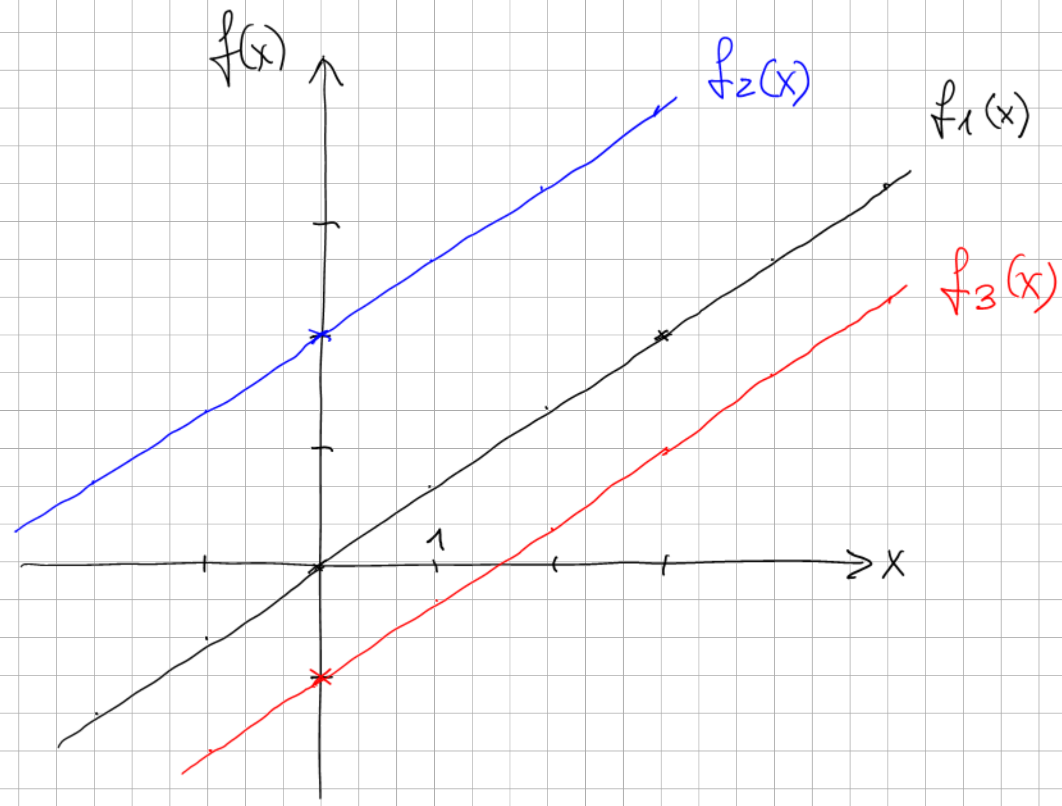
Gleichung $\quad 2x - 3y = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x$

$f_1(x) = \frac{2}{3}x$

$f_2(x) = \frac{2}{3}x + 2$

$f_3(x) = \frac{2}{3}x - 1$



$f_1(x) = \frac{2}{3}x$

$f_4(x) = 2x$

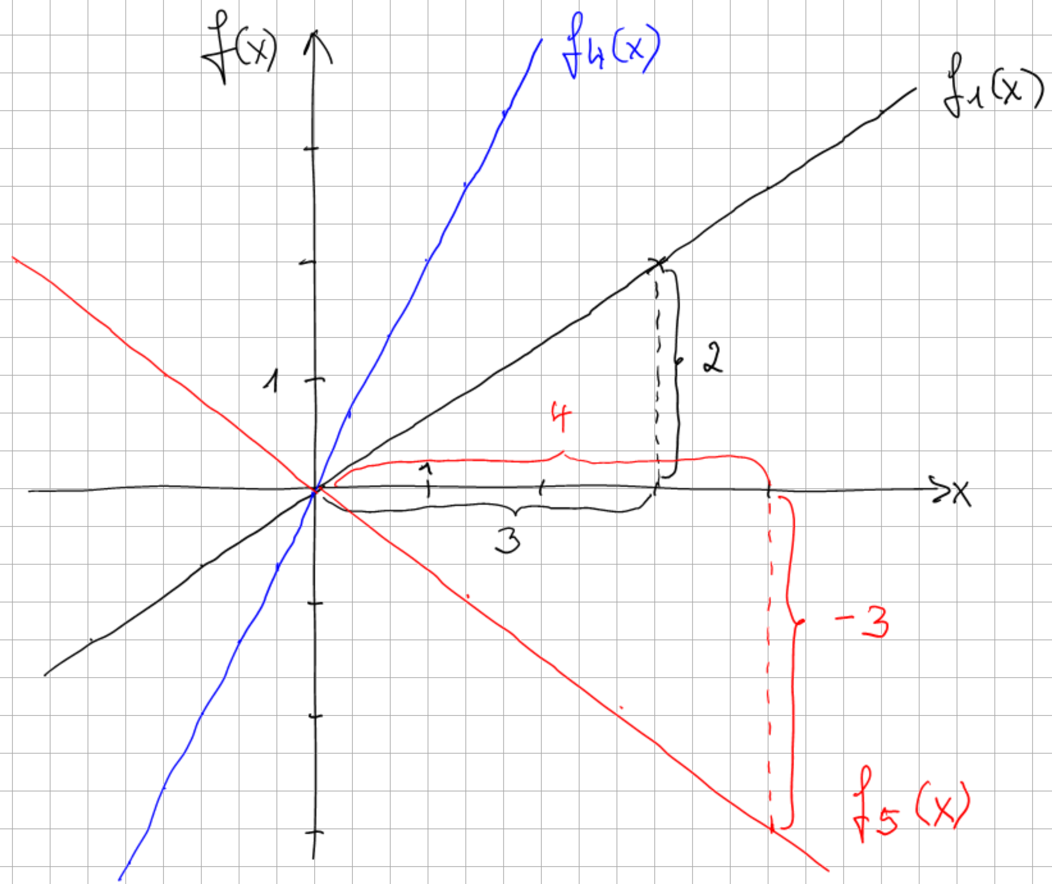
$f_5(x) = -\frac{3}{4}x$

Steigung ist positiv.

$\Rightarrow$ Es ist eine steigende Gerade.

Steigung ist negativ.

$\Rightarrow$ Es ist eine fallende Gerade.



Lineare Funktion

$$f(x) = mx + b$$

mit m : Steigung
b : Ordinatenabschnitt

Aufgaben

Skript Nr. 39a

Zusatzdokument Kap. 3 3.1.1, 3.1.2 Nr. 1-5, 8

3.1.3 Nr. 1+2