Vorkurs 21. 2. 2025

ii) Zwei lineare Gleichungen

Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

- Wertepaar (x, y), das beide Gleichungen erfüllt
- Punkt (x, y), der auf beiden Geraden liegt, die durch die zwei linearen Gleichungen dargestellt werden

1. Fall:

$$-4x + 6y = -3$$
$$x = -2y + 6$$

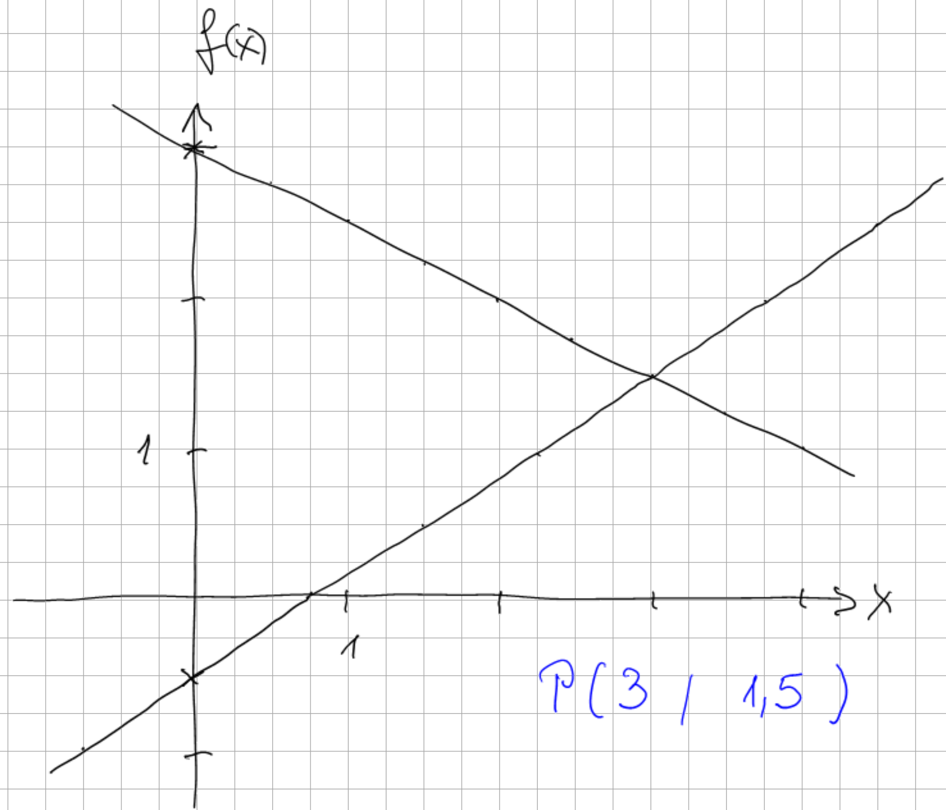
Auflösen nach y liefert

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

verschiedene Steigungen,

daher ein gemeinsamer Punkt



P(3 / 1,5)

2. Fall:

$$2y = -4 + 3x$$
$$2y = 2 + 3x$$

auflösen nach y liefert

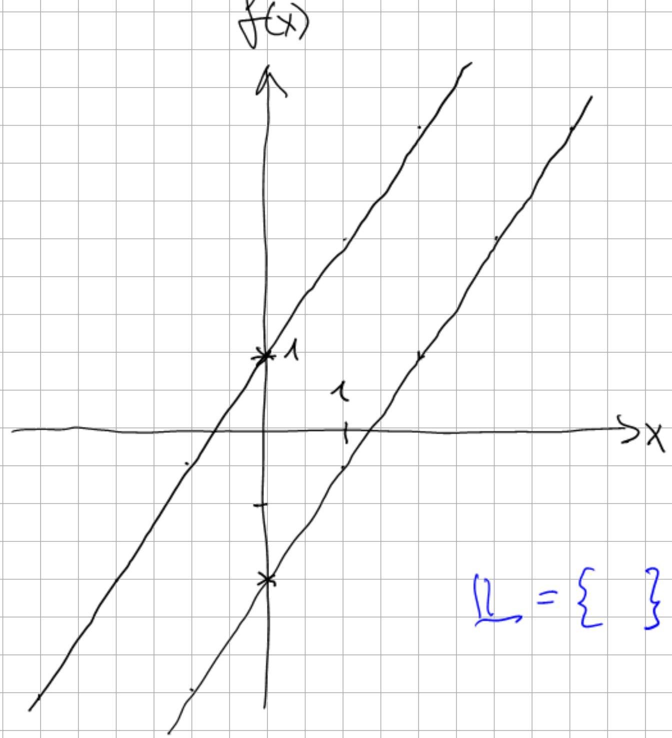
$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

→ gleiche Steigung, also Geraden parallel

→ verschiedene Ordinatenabschnitte, also Geraden nicht identisch

Daher: kein gemeinsamer Punkt



$\mathbb{L} = \{ \ \}$

3. Fall:

$$4x + 2y = 3$$
$$-28x - 14y = -21$$

auflösen nach y liefert

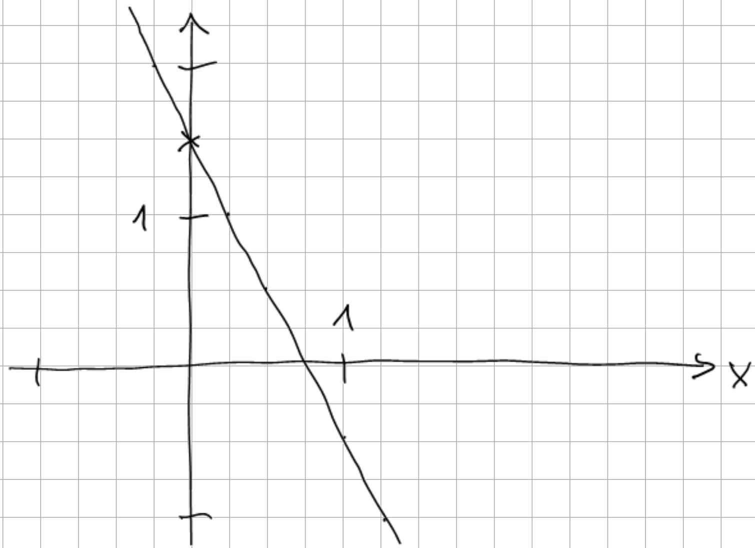
$$y = -2x + \frac{3}{2}$$

$$y = -2x + \frac{3}{2}$$

identische Geraden

daher unendlich viele

gemeinsame Punkte

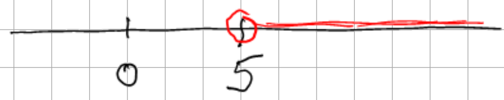


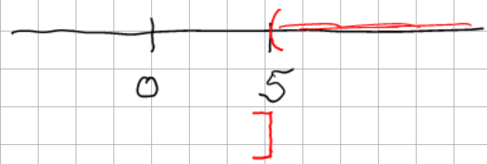
$$\mathbb{L} = \{ x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x + \frac{3}{2} \}$$

3.2 Lineare Ungleichungen

3.2.1 Grundlagen und Äquivalenzumformungen

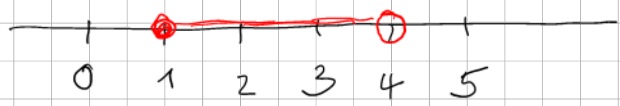
$x > 5$ $\qquad x \in \mathbb{R}$





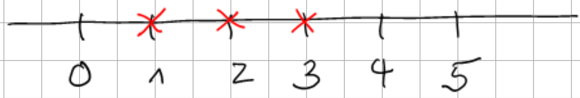
$x \leq 1$

$1 \leq x < 4$ $\qquad x \in \mathbb{R}$



$\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4 \}$

$1 \leq x < 4$ $\qquad x \in \mathbb{N}$



$\mathbb{L} = \{ 1, 2, 3 \}$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$$1 < 2 \qquad | \cdot (-1)$$

$$-1 > -2$$

$$2 < 3 \qquad -2 > -3$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$$

Ungleichungszeichen umdrehen bei Kehrwertbildung

$$-2 < 3$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

Ungleichungszeichen bleibt erhalten

Äquivalenzumformungen

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &< x + 7 &&| +2 \\
4x &< x + 9 &&| -x \\
3x &< 9 &&| :3 \\
x &< 3
\end{aligned}
$$

Aber:

$$
\begin{aligned}
-4x - 2 &< -x + 7 &&| +2 + x \\
-3x &< 9 &&| :(-3) \\
x &> -3
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit oder Division durch negative Zahlen fordert:

Ungleichungszeichen umdrehen

Beispiel:

Wenn man zum Drittel einer Zahl 1 addiert,

so erhält man mehr als wenn man vom Vierfachen dieser Zahl

5 subtrahiert und das Ergebnis halbiert.

$$\frac{1}{3}x + 1 > \frac{4x-5}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{2}{3}x + 2 > 4x - 5 \quad | -2$$

$$\frac{2}{3}x > 4x - 7 \quad | -4x$$

$$-\frac{10}{3}x > -7 \quad | : \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$x < \frac{21}{10}$$

3.2.2 Ungleichungen mit Parameter

$y > 0$ erfüllt für positive y

$-z > 0$ erfüllt für negative z

Gesucht: x, $x \in \mathbb{R}$

$$4 + a(x+3) < 7 \quad | -4 \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \text{ beliebig}$$

$$a(x+3) < 3$$

$$ax + 3a < 3 \quad | -3a$$

$$ax < 3 - 3a$$

1. Fall: $a = 0 \Rightarrow ax < 3 - 3a$ wird zu $0 < 3$

$4 + a(x+3) < 7$ wird zu $4 < 7$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid a = 0 \}$$

2. Fall:

$a > 0$ $\qquad ax < 3 - 3a \quad | : a$

$$x < \frac{3}{a} - 3$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < \frac{3}{a} - 3,\ a > 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Fall:

$a < 0$ $\qquad ax < 3 - 3a \quad | : a$

$$x > \frac{3}{a} - 3$$

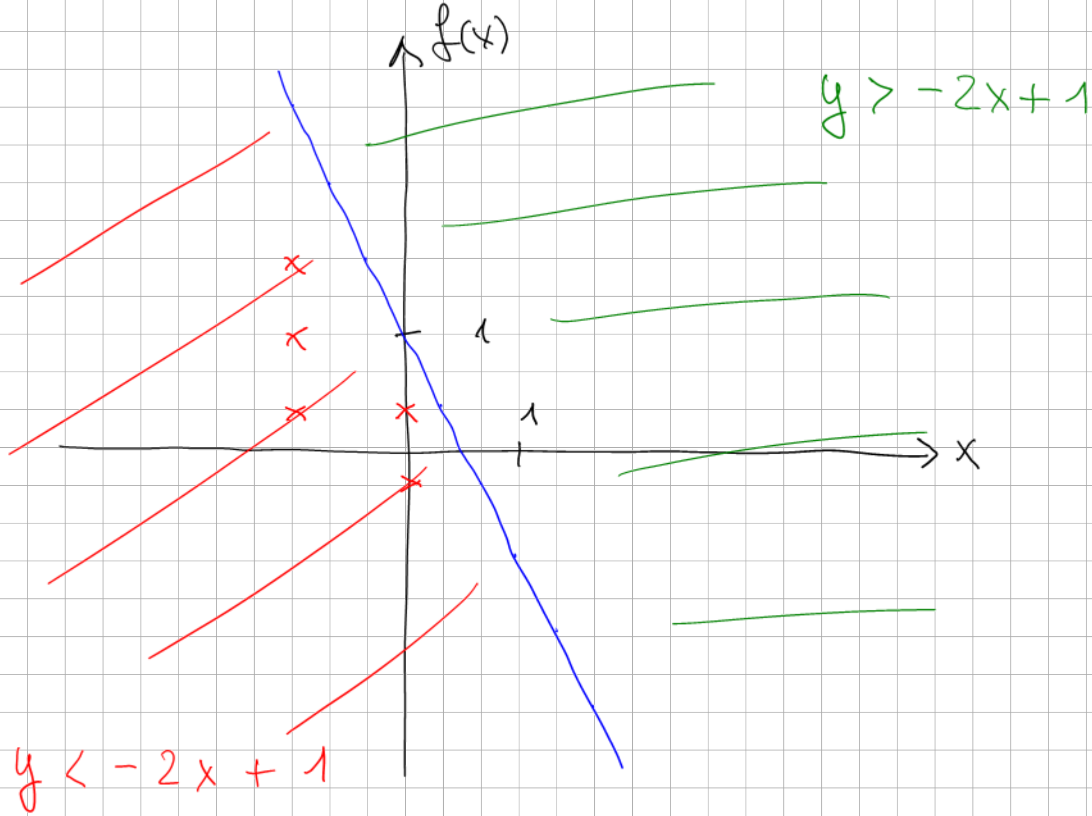
$$\mathbb{L}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > \frac{3}{a} - 3,\ a < 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$$

3.2.3 Lineare Ungleichungen mit 2 Unbekannten

$f(x) = -2x + 1$ Gerade

$y = -2x + 1$



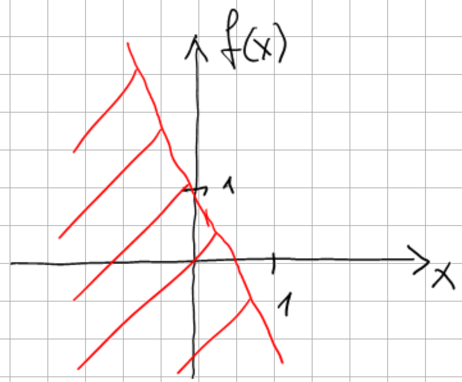
Ungleichung

$y < -2x + 1$

$y > -2x + 1$

$y \le -2x + 1$

Gerade ist Teil der Lösungsmenge



Aufgaben

Skript Nr. 40 Bitte zuletzt bearbeiten

Ersatzdokument Kap. 3.1 3.1.2 Nr. 6+7, 9+10

3.1.3 Nr. 3+4

Kap. 3.2 Teil 1: Nr. 1-6, 8a+b

Teil 2: Nr. Nr. 8c+d