

4. Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

4.1 Quadratische Gleichungen

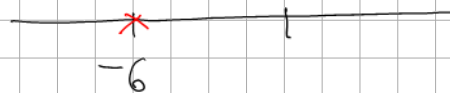
4.1.1 Arten quadratischer Gleichungen

1) $x^2 = 9$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = -3$



$$\mathbb{L} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \vee x = 3 \}$$
$$= \{ -3, 3 \}$$

2) $(x+6)^2 = 0$ $\sqrt{\quad}$
 $x_{1/2} + 6 = \pm 0$
 $x_{1/2} = -6$



3) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$(x-5)^2 = 0 \quad \sqrt{\quad}$$
$$x_{1/2} = 5$$

$$\begin{aligned} 4) \quad x^2 - 49 &= 0 \\ x^2 &= 49 \quad | \sqrt{} \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad x^2 - 49 &= 0 \\ (x+7)(x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist.

$$x_1 + 7 = 0$$

$$x_1 = -7$$

$$x_2 - 7 = 0$$

$$x_2 = 7$$

$$\left(x + \frac{7}{3012}\right) \left(x - \frac{13^2}{\sqrt{\pi}}\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{7}{3012}$$

$$x_2 = \frac{13^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x-5)(x+3) = 0$$

Also:

$$x^2 - 137x - 591 = 0$$

$$x^2 - \frac{19}{7}x + \frac{91}{1112} = 0$$

Lösen quadratischer Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14 = 0$$

$a^2 - 2ab + b^2$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{56}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} - \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$$

Quadratische Ergänzung allgemein durchführen, um Formel zu entwickeln

$$\| \quad x^2 + px + q = 0 \quad \|$$

$$\underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{}} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\| \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \|$$

Die Lösungen hängen von p und q ab und somit vom Radikanden, der sog. Diskriminante.

1) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ 2 verschiedene Lösungen 2 Werte x_1, x_2

2) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ 2 gleiche Lösungen 1 Wert $x_1 = x_2$

3) $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ keine reelle Lösung

Beispiele

$$x^2 - 4x + 80 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 80$$

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 80}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - 80}$$

keine reelle Lösung

Spezielle Fälle

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Substitution: $z = x^2 \Rightarrow z^2 = x^4$

$$\Rightarrow z^2 - z - 6 = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = -2$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2$$

$$z_2 = x^2$$

$$3 = x^2$$

$$-2 = x^2$$

$$x_1 = +\sqrt{3}$$

keine weiteren reellen Lösungen

$$x_2 = -\sqrt{3}$$

$$x^6 - 5x^3 + 6 = 0$$

Substitution: $z = x^3 \Rightarrow z^2 = x^6$

$$\Rightarrow z^2 - 5z + 6 = 0$$

$$(z - 2)(z - 3) = 0$$

$$z_1 = 2 \Rightarrow x_{1,2,3} = \sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = 3 \Rightarrow x_{4,5,6} = \sqrt[3]{3}$$

$$x^{10} + 3x^4 + 8 = 0$$

Nicht mit Substitution lösbar, da $(x^4)^2 = x^8 \neq x^{10}$

Allgemeine quadratische Gleichung

$$7x^2 + 9x - 31 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | :a \quad \text{mit } a \neq 0$$

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_p x + \underbrace{\frac{c}{a}}_q = 0$$

Division durch a ist erlaubt, da für $a=0$ keine quadratische Gleichung vorliegt

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Beispiel:

Wird eine Seite eines Quadrats auf ein Drittel ihrer Länge verkürzt und die andere Seite um 8 cm verlängert, so nimmt der Flächeninhalt um 8 cm^2 ab. Wie lang ist die Quadratseite?

$$\frac{1}{3}a \cdot (a+8) = a^2 - 8$$



$$\frac{1}{3}a^2 + \frac{8}{3}a = a^2 - 8$$

$$-\frac{2}{3}a^2 + \frac{8}{3}a + 8 = 0$$

⋮

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = -2 \quad \text{nicht sinnvoll, da Längen nicht negativ sein}$$

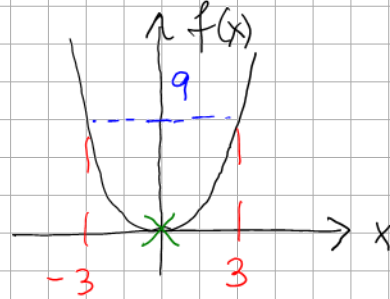
$$\text{Probe:} \quad 2 \cdot 14 = 36 - 8$$

$$28 = 28 \quad \checkmark$$

4.1.3 Grafische Darstellung

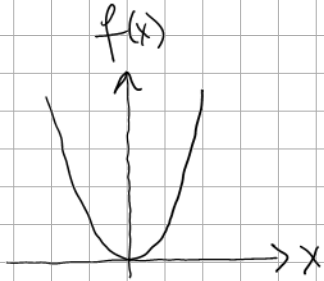
$$x^2 = 9$$

$$f(x) = x^2$$

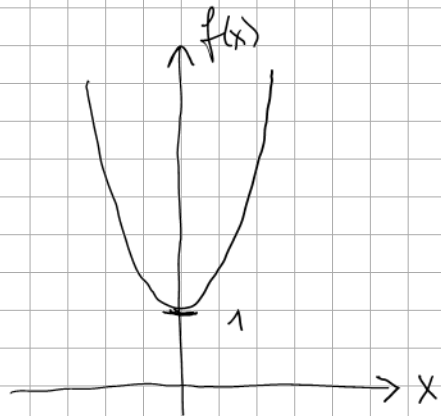


Scheitelpunkt $S(0|0)$

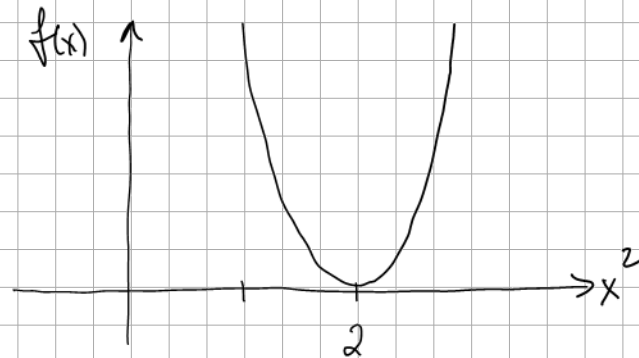
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^2 + 1$$

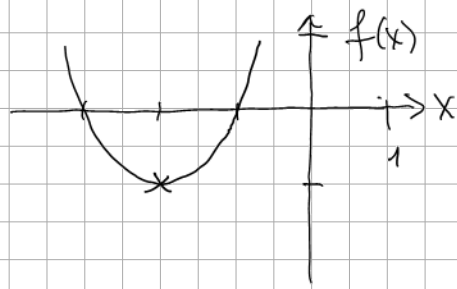


$$f(x) = (x-2)^2$$

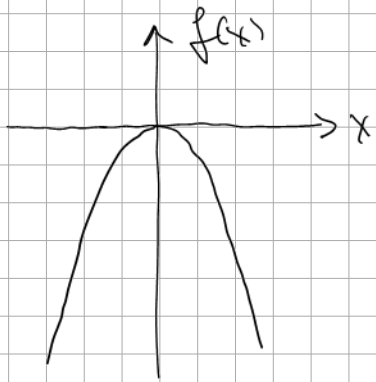


$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

$$S(-2 | -1)$$

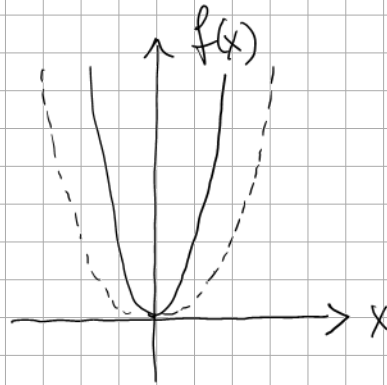


$$f(x) = -x^2$$



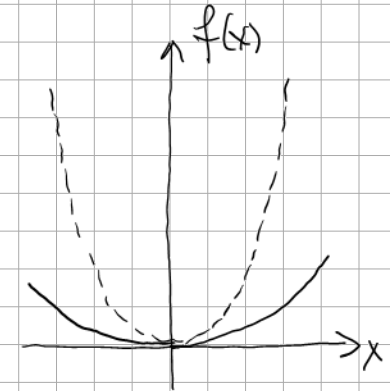
$$f(x) = 2x^2$$

schmäler
gestreckt



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

breiter
gestaucht



$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Scheitelpunktform

allgemeine Darstellung

ausmultiplizieren

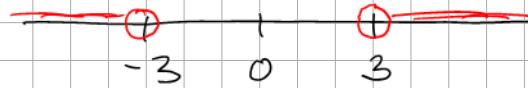
quadratische
Ergänzung

4.2 Quadratische Ungleichungen

$$x^2 > 9$$

$$\Rightarrow x > 3 \quad \vee \quad x < -3$$

oder



$$x^2 < 9$$

$$\Rightarrow x < 3 \quad \wedge \quad x > -3$$

und

$$-3 < x < 3$$



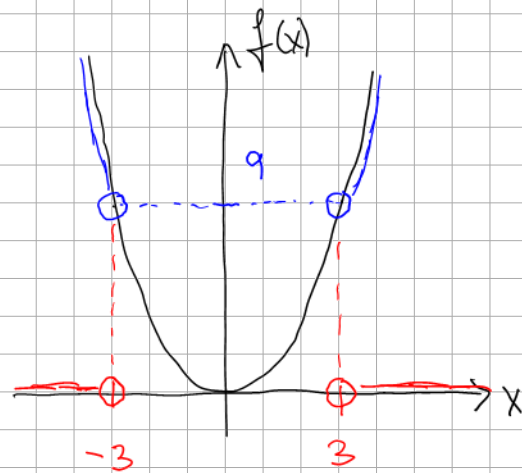
Zwei Lösungsstrukturen:

- zwei getrennte Bereiche
- ein zusammenhängender Bereich

Vorsicht beim Quadrieren von Ungleichungen!

Siehe Zusatzdokument

$$f(x) = x^2$$
$$x^2 > 9$$



Aufgaben

Skript

Nr. 33 a, d, g p-q-Formel

Nr. 34 d, e, f, l quadratische Ergänzung

Zusatzdokument

Kap. 4.1

Nr. 1-9

Kap. 4.2

Teil 1: Nr. 1, 4, 5

Teil 2: Nr. 2, 3