Vorkurs 25.2.2025

5. Potenzrechnung, Exponentialfunktion, Logarithmen

5.1 Potenzrechnung, Wurzelrechnung

Rechenregeln

$$a^2 \cdot a^3 = a^5 \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^6}{a^2} = a^4 \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

gleiche Basis

$$(a \cdot b)^2 = ab \cdot ab = a^2 b^2 \qquad (a \cdot b)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

gleicher Exponent

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6 \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Potenz einer Potenz

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vorzeichenwechsel im Exponent

$$a^0 = 1$$

hoch Null

Bemerkungen

$0^4 = 0$

$4^0 = 1$

0^0
- Zahl: sinnvoll 1
- Grenzprozess: unbestimmt

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ 4 mal Faktor a

$4a = a + a + a + a$ viermal a

$a^2 + a^3 = a \cdot a + a \cdot a \cdot a$

$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

$$100 = 10^2$$
$$10 = 10^1$$
$$1 = 10^0$$
$$0{,}1 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$
$$0{,}01 = 10^{-2} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$$

$$0{,}03 \neq \frac{1}{300}$$
$$= 3 \cdot 0{,}01 = \frac{3}{100} = 3 \cdot 10^{-2}$$

Präfixe

$$1\,\text{km} = 1 \cdot 10^3\,\text{m} = 1 \cdot 10^3 \cdot 10^3\,\text{mm} = 10^6\,\text{mm}$$
$$4\,\text{m}^2 = 4 \cdot (10^2\,\text{cm})^2 = 4 \cdot 10^4\,\text{cm}^2$$
$$9\,\text{mm}^3 = 9 \cdot (10^{-3}\,\text{m})^3 = 9 \cdot (10^{-3} \cdot 10^{-3}\,\text{mm})^3 = 9 \cdot 10^{-18}\,\text{mm}^3$$

Größenordnung:

$$2^{10} \approx 10^3$$
$$2^{10} = 1024$$

Wurzeln

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$$

$$9^2 = 81$$
$$9^1 = 9$$
$$9^{\frac{1}{2}} = 3$$
$$9^0 = 1$$

Rechengesetze

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad \text{denn} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Beispiele

$$5a^2b + 3b^4 - 11a^2b = -6a^2b + 3b^4$$

$$2x^3y^{-1}\left(3x^2y^4 - 7x^{-5}y^{-2}\right) = 6x^5y^3 - 14x^{-2}y^{-3}$$

$$\left(2^{-2}\right)^{-2} = 2^4 = 16$$

$$\frac{30c^2d^3}{40c^{-2}d^4} = \frac{3}{4}c^{2-(-2)}d^{3-4} = \frac{3}{4}c^4d^{-1}$$

$$12x^2y^4z^5 - 18x^4y^2z + 16xyz^5 = 2xyz\left(6xy^3z^4 - 9x^3y + 8z^4\right)$$

$$19z^2 + z = z(19z + \underline{\underline{1}})$$

$$\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 5\sqrt{7}\right) = 3\cdot\sqrt{7}^2 - 5\cdot\sqrt{7}^2 = 3\cdot 7 - 5\cdot 7 = 21 - 35 = -14$$

$$= \sqrt{7}\left(-2\sqrt{7}\right) = -2\cdot 7 = -14$$

$$\big(\underbrace{2\sqrt{6}}_{a} - \underbrace{3\sqrt{5}}_{b}\big)^2 = \underbrace{(2\sqrt{6})^2}_{a^2} \underbrace{-\,2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{5}}_{-\,2ab} \underbrace{+\,(3\sqrt{5})^2}_{+\,b^2}$$

$$= 4\cdot 6 - 12\sqrt{30} + 9\cdot 5$$

$$= 24 - 12\sqrt{30} + 45$$

$$= 69 - 12\sqrt{30}$$

$$\cancel{= 57\sqrt{30}}$$

Punktrechnung vor Strichrechnung

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} &= \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}+6} \\ \frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} &= \frac{6+2\sqrt{6}}{9+6\sqrt{6}+6} \end{aligned}\right\} \text{geht nicht}$$

So erweitern, dass die 3. Binomische Formel entsteht, denn dann werden die gegebenen Summanden einzeln quadriert

$$\frac{2}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{6-2\sqrt{6}}{9-6} = \frac{6-2\sqrt{6}}{3} = 2-\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Grafische Darstellung

$f_1(a) = a^2$ a^n, n gerade

$f_2(a) = a^3$ a^n, n ungerade

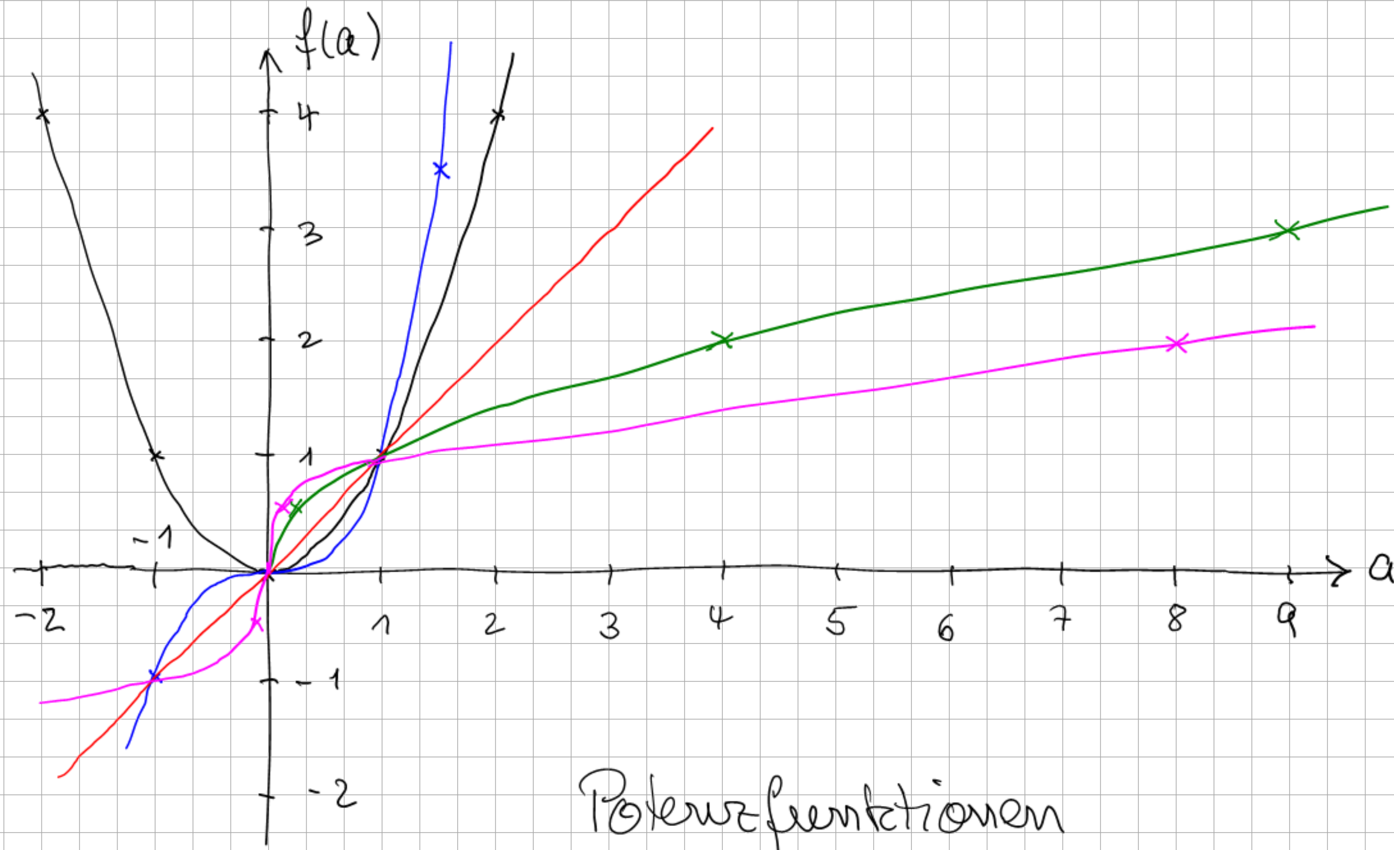
$f_3(a) = a$

$f_4(a) = \sqrt{a}$

$\sqrt[n]{a}$, n gerade

$f_5(a) = \sqrt[3]{a}$

$\sqrt[n]{a}$, n ungerade



Potenzfunktionen

5.2 Exponentialfunktion

200 € gespart — Zwei Möglichkeiten der Geldanlage

1) jedes Jahr 40 € dazu — fester Betrag dazu, lineares Wachstum

2) jedes Jahr 10 % dazu — fester Anteil dazu, exponentielles Wachstum

Was ist günstiger?

1. Fall: $f(x) = 40x + 200$

2. Fall:

Jahr 0: $200\,€$

Jahr 1: $200\,€ + \frac{10}{100} \cdot 200\,€ = 200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 200\,€ \cdot 1{,}1$

Jahr 2: $200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right) + \frac{10}{100} \cdot 200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{10}{100}\right)$

$$= 200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 200\,€ \cdot 1{,}1^2$$

Jahr 7: $200\,€\left(1 + \frac{10}{100}\right)^7 = 200\,€ \cdot 1{,}1^7$

Allgemein: $f(x) = 200 \cdot 1{,}1^{x}$ Exponentialfunktion

2 Jahre: 1) $f(2) = 2 \cdot 40 + 200 = 280$

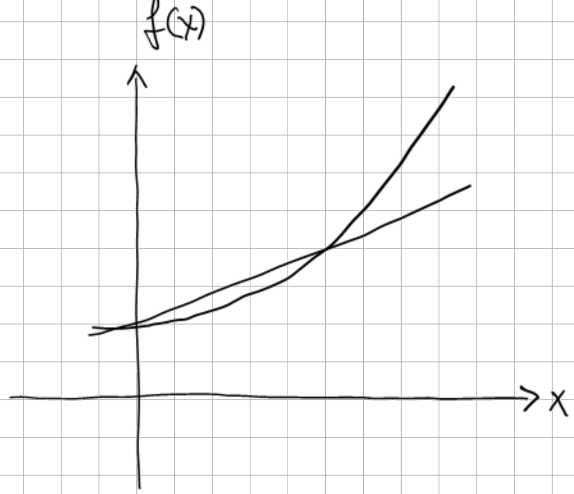
2) $f(2) = 242$

10 Jahre: 1) $f(10) = 600$

2) $f(10) = 518$

15 Jahre: 1) $f(15) = 800$

2) $f(15) = 825$



Grafische Darstellung

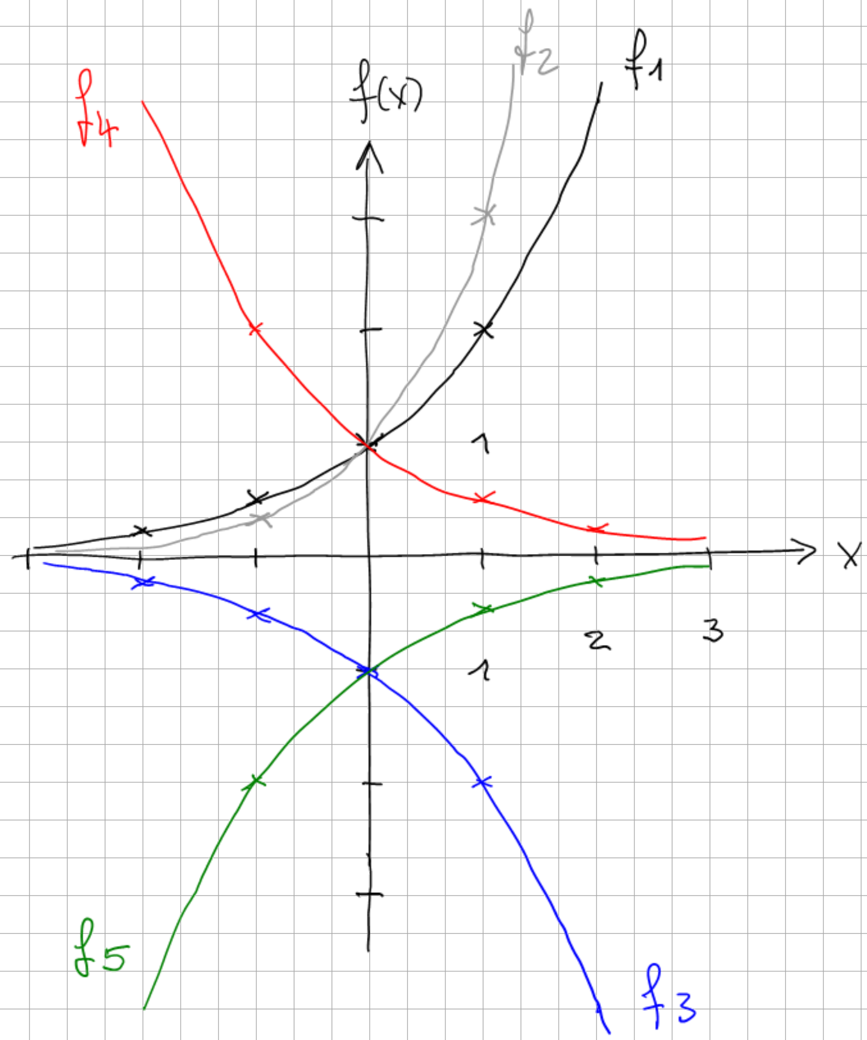
$f_1(x) = 2^x$

$f_2(x) = 3^x$

$f_3(x) = -2^x$

$f_4(x) = 2^{-x}$

$f_5(x) = -2^{-x}$



Aufgaben

Teil 1: Skript Nr. 16, 17a+b, 18, 19, 20

Zusatzdokument Kap. 5.1 Nr. 1, 3

Teil 2: Skript Nr. 17c-e, 21

Zusatzdokument Nr. 2