Vorkurs 26.2.2025

Exponentialfunktion

Exponentieller Wachstum $\quad f(x) = f(0) \cdot q^x$

mit $f(x)$: Größe, deren Veränderung gemessen wird, z.B. Geld, Strahlung

x : in Abhängigkeit von x erfolgt die Zu- und Abnahme, z.B. Zeit, Höhe

$f(0)$: Menge, die am „Anfang" $(x=0)$ vorhanden ist, Startwert

$f(x)$: Menge, die nach „Ablauf", „Verstreichen" von x vorhanden ist

q : Faktor, der die Zu- oder Abnahme beschreibt

$q = 1{,}05 = 1 + \frac{5}{100}$ Zunahme um 5%

$q = 0{,}96 = 1 - \frac{4}{100}$ Abnahme um 4%

Man kann mit zwei Größen die Funktion definieren: $f(0)$, q

Zwei Wertepaare bekannt, dann 2 Gleichungen aufstellen: $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$

Beliebt als Basis: Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718$

$f(x) = f(0) \cdot e^{\frac{x}{c}}$ c ist zu bestimmen

Beispiele

1) Zunahme einer Algenkultur

Nach 4 Tagen: $20\,cm^2$ Nach 6 Tagen: $40\,cm^2$

Tägliche Zunahme der Algenfläche in Prozent?

$f(4d) = 20\,cm^2 \quad \Rightarrow \quad 20 = f(0) \cdot q^4$

$f(6d) = 40\,cm^2 \quad \Rightarrow \quad 40 = f(0) \cdot q^6$

$20 = f(0) \cdot q^4 \quad | : q^4$

$f(0) = \frac{20}{q^4}$

Einsetzen in 2. Gleichung:

$40 = \frac{20}{q^4} \cdot q^6$

$40 = 20 \cdot q^2$

$q^2 = 2 \quad | \sqrt{\ }$

$q_1 = \sqrt{2}$

$q_2 = -\sqrt{2}$ nicht sinnvoll, da negativ

also $q = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

Zunahme um 41 %

q in Gleichung von f(0) einsetzen

$f(0) = \frac{20}{\sqrt{2}^4}$

$f(0) = \frac{20}{4}$

$f(0) = 5$

also $f(x) = 5 \cdot \sqrt{2}^x$

$f(x) = 5 \cdot 1{,}41^x$

2) Eine schwere Aufgabe kann nur von 3 Studierenden gelöst werden.

Pro Stunde können sie den Lösungsweg einer weiteren Person erklären.

Wieviele Studierende kennen den Lösungsweg nach 5 Stunden?

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

$$f(5) = 3 \cdot 2^5 = 96$$

3) Kapital von 5000 €, Zinssatz von 2% pro Jahr, Zinsen werden mitverzinst

Wieviel Kapital hat man nach 3 Jahren?

$$f(x) = 5000 \cdot 1{,}02^x$$

$$f(3) = 5000 \cdot 1{,}02^3$$

$$\approx 5306{,}04$$

4) Intensität von Licht nimmt beim Durchgang durch eine Glasplatte um 4 % ab. Wieviel Licht ist nach 8 Platten noch vorhanden?

$f(x) = 100 \cdot 0{,}96^x$ Einheit Prozent

$f(8) = 100 \cdot 0{,}96^8$

$\approx 72{,}1$

Alternative Ansätze:

- $f(0) = 1$ Startwert $100\,\% = \frac{100}{100} = 1$ $\Rightarrow f(8) = 0{,}721$
- $f(0)$ $\Rightarrow f(8) = f(0) \cdot 0{,}96^8 = f(0) \cdot 0{,}721$

Problemstellung

radioaktives Jod $T_H = 7d$ T_H: Halbwertszeit

zu Beginn: 80g

Wieviel Jod ist nach 14 Tagen noch vorhanden?

Start: $f(0) = 80$

1. Woche: $f(1) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 40$

2. Woche: $f(2) = 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 20$

x: Anzahl verstrichener Halbwertszeiten

Wieviel Jod ist nach 10 Tagen noch vorhanden?

1. Woche: $f(7) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{7}}$ Wert von x T_H

2. Woche: $f(14) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{7}}$

x: Anzahl verstrichener Tage

Also: $$f(t) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{7}}$$

mit t: Zeit

$T_H = 7$: Halbwertszeit

$$\left.\begin{matrix} t: \text{Zeit} \\ T_H = 7: \text{Halbwertszeit} \end{matrix}\right\} \frac{t}{T_H} \text{ Anzahl verstrichener Halbwertszeiten}$$

Unser Beispiel: $$f(10) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{7}}$$
$$\approx 29{,}72$$

Allgemein:
$$f(t) = f(0) \cdot q^{\frac{t}{T_0}}$$

mit T_0: Halbwertszeit, Drittelungszeit, Verdoppelungszeit ...

Problem: Isotop $T_H = 30y$ Zu Beginn: $10\,000 \frac{Bq}{kg}$ (Bq: Anzahl Zerfälle/s)

Wann sind $600 \frac{Bq}{kg}$ erreicht?

$$600 = 10000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

Um nach t aufzulösen, braucht man Logarithmenrechnung.

5.3 Logarithmen

Begriffe:

Exponent, Logarithmus

Basis $\quad 2^3 = 8$

Potenz $\quad$ Potenzwert

$2^3 = x$ potenzieren

$x^3 = 8$ radizieren

$2^x = 8$ logarithmieren

Der Exponent, der zur Basis 2 gehört, so dass der Potenzwert 8 ist, ist 3.

Der Exponent zur Basis 2 für den Potenzwert 8 ist 3.

Der Logarithmus zur Basis 2 von 8 ist 3.

$$\log_2(8) = 3$$

$$2^3 = 8$$

Regeln

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3}$$

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3}$$

$$(4^3)^2 = 4^{3\cdot 2}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$

$$9^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad \log_9(81) = 2$$

$$\log_5(125) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 125$$

$$\log_3(9) = \log_3(3^2) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{64}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{64^{1/3}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$$

$$= \log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^{6/3}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = -2$$

$$\log_5(1) = 0$$

$$\log_a(1) = 0$$ Spezialfall $a = 1$ => Logarithmus beliebig

Oft gebräuchlich: $\log_{10}(x) = \lg(x)$ dekadischer Logarithmus

$\log_e(x) = \ln(x)$ natürlicher Logarithmus

Was tun, wenn $\log_2(5)$?

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

b „beliebige" Basis

Also: $\log_2(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(2)}$

Bemerkung:

$f(x) = x^2$

$f_{\text{speziell}}(x) = \ldots$

$\ln(x) = \ldots$

Beispiel:

$$\log_{\sqrt[5]{7}}\left(\sqrt[3]{7^{10}}\right) = \frac{\log_7\left(\sqrt[3]{7^{10}}\right)}{\log_7\left(\sqrt[5]{7}\right)} = \frac{\log_7\left(7^{\frac{10}{3}}\right)}{\log_7\left(7^{\frac{1}{5}}\right)} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{50}{3}$$

Aufgaben

Skript Nr. 26 - 29

Zusatzdokument Kap. 5.2 Nr. 1 - 4

Skript Nr. 22

Zusatzdokument Kap. 5.3 Nr. 1