

Vorlesung 27.2.2025

$$\lg(x \cdot y) = \lg(x) + \lg(y)$$

$$\lg\left(\frac{2a}{b}\right) = \lg(2a) - \lg(b) = \lg(2) + \lg(a) - \lg(b)$$

$$\ln(c^8) = 8 \ln(c)$$

$$\ln(a b^y) = \ln(a) + y \ln(b)$$

$$\ln(2x + y^2) = \text{nicht weiter vereinfachbar}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^8 \cdot m^7}{c^8 \cdot z^{-5}}\right) &= \ln(x^8 \cdot m^7) - \ln(c^8 \cdot z^{-5}) \\ &= 8 \ln(x) + 7 \ln(m) - (8 \ln(c) - 5 \ln(z)) \\ &= 8 \ln(x) + 7 \ln(m) - 8 \ln(c) + 5 \ln(z) \end{aligned}$$

$$3 \lg(a) - 8 \lg(b) = \lg\left(\frac{a^3}{b^8}\right)$$

$$\begin{aligned} a \lg(x) - \frac{1}{b} \lg(y) - c \lg(z) &= a \lg(x) - \left(\frac{1}{b} \lg(y) + c \lg(z)\right) \\ &= \lg\left(\frac{x^a}{\sqrt[b]{y} \cdot z^c}\right) \end{aligned}$$

$$\log_3(45) + \log_3(15) - \log_3(75) = \log_3\left(\frac{\overset{3}{\cancel{45}} \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{\cancel{5}}{\cancel{75}}}\right) = \log_3(9) = 2$$

# Grafische Darstellung

$$a = 2$$

$$\log_2(1) = 0$$

$$\log_2(2) = 1$$

$$\log_2(4) = 2$$

$$\log_2(8) = 3$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

$\log_2(0)$  wird unendlich klein

$\log_2(b)$ ,  $b < 0$  nicht definiert

$$a = 4$$

$$\log_4(1) = 0$$

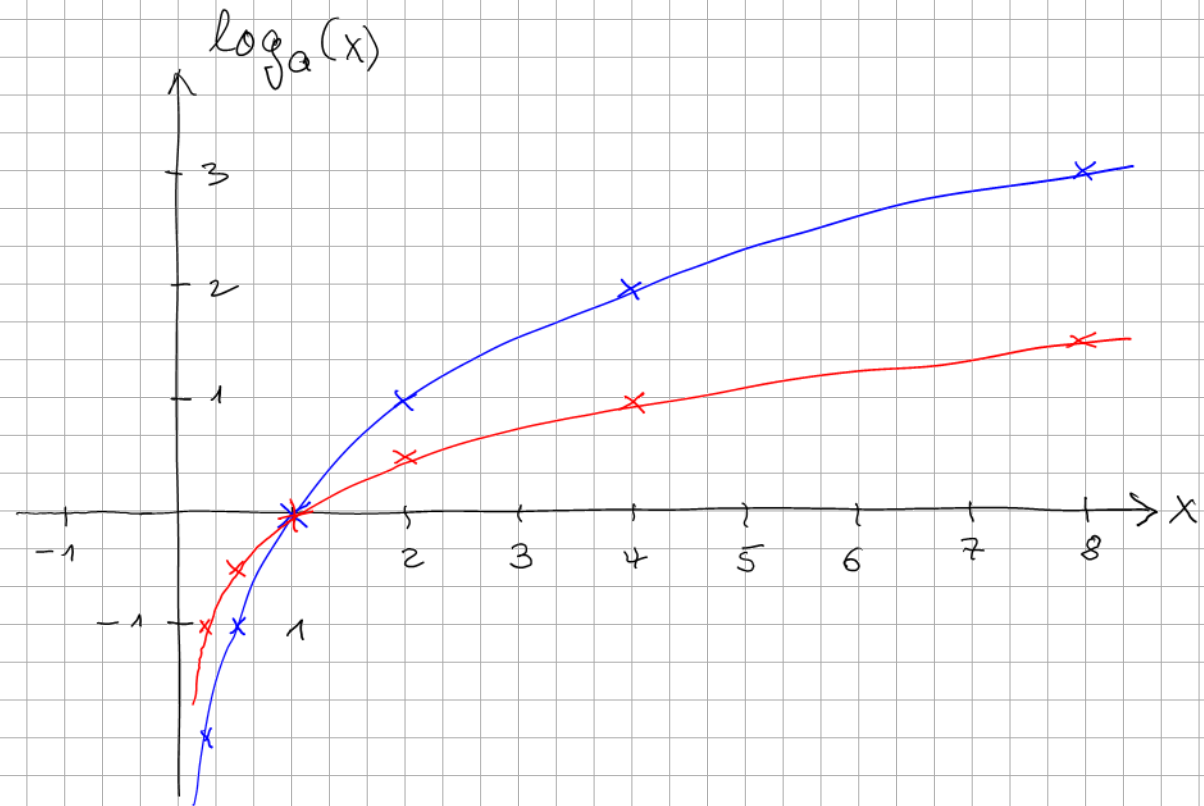
$$\log_4(2) = \frac{1}{2}$$

$$\log_4(4) = 1$$

$$\log_4(8) = \frac{3}{2}$$

$$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$



$$\log_{\sqrt[3]{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = x$$

$$x = \frac{\log_5(5^{-2})}{\log_5(5^{\frac{1}{3}})}$$

$$x = \frac{-2}{\frac{1}{3}}$$

$$x = -6$$

$$\log_x(512) = 9$$

$$x^9 = 512 \quad |^9\sqrt{\quad}$$

$$x = 2$$

$$\log_{25}(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 25^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{25}}$$

$$x_1 = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = -\frac{1}{5} \quad -\frac{1}{5} \notin \mathbb{D}$$

Daher ist nur  $x_1$  die Lösung.

Beispiel zum Isotop mit  $T_H = 30y$

$$600 = 10000 \cdot 0,5^{\frac{t}{30}} \quad | : 10000$$

$$\frac{6}{100} = 0,5^{\frac{t}{30}}$$

$$\log_{0,5} \left( \frac{6}{100} \right) = \log_{0,5} \left( 0,5^{\frac{t}{30}} \right)$$

$$\log_{0,5} \left( \frac{6}{100} \right) = \frac{t}{30} \quad | \cdot 30$$

$$t = 30 \log_{0,5} \left( \frac{6}{100} \right)$$

$$t = 30 \cdot \frac{\ln\left(\frac{6}{100}\right)}{\ln(0,5)}$$

$$t \approx 121,77y$$

Start: 10 000  $\frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$

$^{137}\text{Cs}$  Wildschwein  
Bayern 2013

600  $\frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$  EU  
121,77 y

30  $\frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$  D  
251,42 y

5  $\frac{\text{Bq}}{\text{kg}}$  D Babynahrung  
328,97 y

## 5.4 Exponentialgleichungen

Beispiel:

Zwei Sparverträge: 1) 1,2% , 1000 €  
2) 5 Jahre später: 1,2% , 1500 €

Wann erreicht man mit beiden Verträgen zusammen 4000 €?

$$K(t) = 1000 \cdot 1,012^t + 1500 \cdot 1,012^{t-5} \quad \text{für } t > 5$$

Weitere Beispiele

1) Sparverträge wie oben, aber mit unterschiedlichen Zinssätzen

$$K(t) = 1000 \cdot 1,012^t + 1500 \cdot 1,1^{t-5}$$

2) Zwei radioaktive Isotope mit unterschiedlichen Halbwertszeiten

$$f(t) = 300 \cdot 0,5^{\frac{t}{30}} + 200 \cdot 0,5^{\frac{t}{70}}$$

Beispiele:

$$5^{2x-3} = 5^1$$

$$2x-3 = 1$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$9^{2x+2} = 27$$

$$(3^2)^{2x+2} = 3^3$$

$$2(2x+2) = 3$$

$$4x + 4 = 3$$

$$4x = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$$7^{x-1} = 3 \cdot 5^x \quad \{ \ln( ) \}$$

$$\ln(7^{x-1}) = \ln(3 \cdot 5^x)$$

$$\underline{(x-1)} \ln(7) = \ln(3) + \underline{x} \ln(5)$$

$$\underline{(x-1)} \ln(7) - \underline{x} \ln(5) = \ln(3)$$

$$\underline{x} \ln(7) - \ln(7) - \underline{x} \ln(5) = \ln(3)$$

$$\underline{x} \ln(7) - \underline{x} \ln(5) = \ln(7) + \ln(3)$$

$$x (\ln(7) - \ln(5)) = \ln(7) + \ln(3)$$

$$x = \frac{\ln(7) + \ln(3)}{\ln(7) - \ln(5)} = \frac{\ln(21)}{\ln\left(\frac{7}{5}\right)}$$

$$x \approx 9,05$$



## Anwendungsbeispiele

1) Ein Kapital von 7000 € wird jährlich mit 1,05% verzinst.

Nach wieviel Jahren ist es mit Zinseszinsen auf 12000 € angewachsen?

$$K(t) = 7000 \cdot 1,0105^t$$

$$12000 = 7000 \cdot 1,0105^t \quad | : 7000$$

$$\frac{12}{7} = 1,0105^t$$

$$\log_{1,0105} \left( \frac{12}{7} \right) = t$$

$$t = \frac{\ln \left( \frac{12}{7} \right)}{\ln(1,0105)}$$

$$\ln \left( \frac{12}{7} \right) = t \cdot \ln(1,0105)$$

$$t = \frac{\ln \left( \frac{12}{7} \right)}{\ln(1,0105)}$$

$$t \approx 51,60 \text{ y}$$

2) Ein Kapital  $K$  wird jährlich mit 5% verzinst (mit Zinseszinsen).  
Nach wieviel Jahren hat es sich verdoppelt?

$$K(t) = K \cdot 1,05^t$$

$$2K = K \cdot 1,05^t \quad | :K$$

$$2 = 1,05^t$$

$$t = \log_{1,05}(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}$$

$$t \approx 14,21 \text{ y}$$

Sparverträge vom Anfang des Kapitels

$$4000 = 1000 \cdot 1,012^t + 1500 \cdot 1,012^{t-5} \quad | : 1500$$

$$8 = 2 \cdot 1,012^t + 3 \cdot 1,012^{t-5}$$

$$8 = 2 \cdot 1,012^t + 3 \cdot 1,012^t \cdot 1,012^{-5}$$

$$8 = 1,012^t (2 + 3 \cdot 1,012^{-5}) \quad | : (\dots)$$

$$1,012^t = \frac{8}{2 + 3 \cdot 1,012^{-5}} \quad | \ln(\dots)$$

$$t \ln(1,012) = \ln\left(\frac{8}{2 + 3 \cdot 1,012^{-5}}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{8}{2 + 3 \cdot 1,012^{-5}}\right)}{\ln(1,012)}$$

$$t \approx 42,37$$

Statt 1000€ nun 1600€ :  $t \approx 23,75$

## Aufgaben

Skript Nr. 23-25, 30, 31

Zusatzdokument Kap. 5,3 Nr. 2-4

Skript Nr. 32

Zusatzdokument Kap. 5,4 Nr. 1-5